4. О критерии оптимальности для выпуклых задач.

см. оборот

Теорема. *(критерий оптимальности для выпуклых задач)*

Пусть U — выпуклое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а функционал $J(u)$ непрерывно дифференцируем на U. $\{J_* > -\infty\}$

Можно без этого условия

Тогда если множество $U_* = \{u_* \in U \mid J(u_*) = \inf\limits_{u \in U} J(u)\}$ непусто, то

$$\forall u_* \in U_* \Rightarrow \langle J'(u_*), u - u_* \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \ \forall u \in U; \quad u_* \in U_* \cap int\, U \Rightarrow J'(u_*) \cong \Theta_{\mathbb{H}}.$$

Если, кроме того, функционал $J(u)$ является выпуклым на U, то из условий $u_* \in U$, $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \ \forall u \in U$ вытекает $u_* \in U_*$.

см. оборот

Теорема. *(проекционная форма критерия оптимальности)*

Пусть U — выпуклое замкнутое множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а функционал $J(u)$ непрерывно дифференцируем на U. $\{J_* > -\infty\}$

Тогда если множество $U_* = \{u_* \in U \mid J(u_*) = \inf\limits_{u \in U} J(u)\}$ непусто, то

$$\forall u_* \in U_* \Rightarrow u_* = Pr_U(u_* - \alpha \underbrace{J'(u_*)}_{a(u_*) \cong J'(u_*)}) \ \forall \alpha \geqslant 0.$$

Док-во К.О.:

Пусть $u_* \in U_* \neq \varnothing$.

⇒ если $u_* \in \operatorname{int} U \xrightarrow{\text{по н.у. extr}} \vec{\theta}_H = a(u_*) \cong J'(u_*)$

— 34.1 —

если $u_* \in \partial U$: для $\forall u \in U$ (u_* фиксир.) рассм. приращение $\underset{\geq 0}{\lambda}(u-u_*) \Rightarrow$

$$0 \le J(u_*+\lambda(u-u_*)) - J(u_*) = \langle a(u_*), \lambda(u-u_*)\rangle_H + \bar{\bar{o}}(\lambda\|u-u_*\|_H) \xrightarrow[\text{на } \lambda\|u-u_*\|_H]{\text{делим}} 0 \le \overset{0}{\frac{1}{\|u-u_*\|_H}}\langle a(u_*), u-u_*\rangle_H + \underset{0}{\frac{\bar{\bar o}(\lambda\|u-u_*\|_H)}{\lambda\|u-u_*\|_H}}$$

при $\lambda \to +0$

в пределе ч.т.д.

⇐ пусть $\exists u_* \in U: \langle \overset{\cong a(u_*)}{J'(u_*)}, u-u_*\rangle_H \ge 0 \ \forall u\in U$

Далее от противного: пусть $\exists \hat u \in U: J(\hat u) < J(u_*) \Rightarrow$ $J(\lambda\hat u + (1-\lambda)u_*) \le \lambda J(\hat u) + (1-\lambda) J(u_*) \Rightarrow$

$$J(u_* + \lambda(\hat u - u_*)) = J(u_*) + \langle a(u_*), \lambda(\hat u-u_*)\rangle_H + \bar{\bar o}(\lambda\|\hat u-u_*\|_H)$$

$$\Rightarrow \lambda(J(\hat u)-J(u_*)) \ge \lambda\langle a(u_*), \hat u-u_*\rangle_H + \bar{\bar o}(\lambda\|\hat u-u_*\|_H)$$

$$\Rightarrow \underset{>0}{\frac{1}{\|\hat u-u_*\|_H}}(\underset{<0}{J(\hat u)-J(u_*)}) \ge \underset{>0}{\frac{1}{\|\hat u-u_*\|_H}}\langle \underset{\ge 0}{a(u_*), \hat u-u_*}\rangle_H + \underset{0}{\frac{\bar{\bar o}(\lambda\|\hat u-u_*\|_H)}{\lambda\|\hat u-u_*\|_H}}$$

при $\lambda \to +0$

в пределе после сокращения $0 > J(\hat u)-J(u_*) \ge \langle a(u_*), \hat u-u_*\rangle_H \ge 0$ противоречие, ч.т.д.

Док-во Пр.Ф.К.О.:

⇒ •) $\exists u_* \in \operatorname{int} U \xrightarrow{\text{н.у. extr}} J'(u_*) \cong \theta_H \Rightarrow u_* = pr_U(\underbrace{u_* - \alpha \overset{\theta}{a(u_*)}}_{u_*})$ верно

$\exists u_* \in \partial U$ при $J'(u_*) \cong \theta_H$

••) $\exists u_* \in \partial U$ при $J'(u_*) \cong a(u_*) \ne \theta_H \xrightarrow{\text{по К.О.}} \langle a(u_*), u-u_*\rangle \ge 0\ \forall u\in U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \underset{\{p\}}{u-u_*}, \underset{\{p\}}{\cancel{u_*}} - (\underbrace{\cancel{u_*}-\alpha a(u_*)}_{\{h\}})\rangle_H = \underset{\ge 0}{\alpha}\langle \underbrace{a(u_*), u-u_*}_{\ge 0}\rangle \ge 0 \xrightarrow[\text{пр-ции}]{\text{хар. св-во}} pr_U(u_*-\alpha a(u_*)) = u_*$$

$\forall \alpha \ge 0$ ч.т.д.

⇐ $\exists u_*\in U: u_* = pr_U(u_*-\alpha a(u_*))$ $\forall\alpha\ge0$ $\xrightarrow{\text{хар. св. пр.}} \langle u-u_*, \cancel{u_*} - (\cancel{u_*} - \alpha a(u_*))\rangle_H \ge 0\ \forall u \in U$

$$\underset{\text{при } >0}{\alpha}\langle a(u_*), u-u_*\rangle_H \ge 0 \Rightarrow \langle a(u_*), u-u_*\rangle_H \ge 0\ \forall u\in U$$

$J(u)$ вып. на U, по К.О.

ч.т.д. $u_* \in U_*$

$J(u) \to \inf\limits_{U}$ •) U выпукло ••) $J(u)$ выпукла на U

Если, кроме того, функционал $J(u)$ является выпуклым на U, то из условий $u_* \in U$, $u_* = Pr_U(u_* - \alpha J'(u_*))\ \forall \alpha \geqslant 0$ вытекает $u_* \in U_*$.

Эти теоремы в основном используются, когда нами при решении выпуклой задачи оптимизации уже каким-то способом найдены подозрительные на оптимальность точки. Однако в ряде случаев их можно отыскать непосредственно с помощью приведённых утверждений. Проиллюстрируем этот факт на паре примеров.

дать схему сх-тей сущ-х ф-ций

Теор.: из $\forall$ посл. $\{u_n(t)\} \xrightarrow[L^2(a,b)]{\text{сх.}} u_0(t)$ можно выделить п/посл. $\{u_{n_k}(t)\} \xrightarrow[\text{п.в.}[a,b]]{\text{сх.}} u_0(t)$

Пример 1

U-вып.: $|\alpha u + (1-\alpha) v| \leqslant \alpha \underbrace{|u|}_{\leqslant 1} + (1-\alpha)\underbrace{|v|}_{\leqslant 1} \leqslant 1$

U-замк.: берем $\forall \{u_n\} \xrightarrow[L^2]{\text{сх.}} u_0$, тогда $u_n \in U$, $u_0 \in L^2(a,b)$; $\exists \{u_{n_k}(t)\} \xrightarrow[\text{п.в.}]{\text{сх.}} u_0(t)$, т.е. для п.в. $t \in [a,b]$ $0 \leqslant \big||u_{n_k}(t)| - |u_0(t)|\big| \leqslant \underbrace{|u_k(t) - u_0(t)|}_{k\to+\infty} \to 0$; значит $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} |u_{n_k}(t)| = |u_0(t)| \leqslant 1 \Rightarrow u_0 \in U$

Рассматривается линейная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &u = u(t) \in U = \{u(t) \in L^2(0,4) \mid |u(t)| \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} 1\ \forall t \in [0,4]\}, \\ &J(u) = \int\limits_0^4 -x(t) + u^2(t)\, dt \to \inf_{u \in U}. \end{aligned}$$

Для вычисления градиента $J'(u)$ заметим, что

$$J(u) = ||u||^2_{L^2(0,4)} - \int\limits_0^4 x(t) \cdot (t-4)'\, dt = ||u||^2_{L^2(0,4)} - \underbrace{(t-4)x(t)|_{t=0}^{t=4}}_{0} + \int\limits_0^4 (t-4)\dot{x}(t)\, dt =$$

$$= ||u||^2_{L^2(0,4)} + \int\limits_0^4 (t-4)u(t)\, dt = ||u||^2_{L^2(0,4)} + \langle c, u\rangle_{L^2(0,4)},$$

где $c = c(t) = t - 4 \in L^2(0,4)$. Значит, $J'(u) \cong 2u + c$. непр. $J(u)$ н/непр. снизу $J(u)^2$ непр.

Ясно, что функционал $J(u)$ является даже сильно выпуклым, а множество U выпукло. Поэтому мы можем воспользоваться критерием оптимальности для выпуклых задач. Условие $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle_{L^2(0,4)} \geqslant 0$ в нашем случае имеет вид

условие $J'(u_*) \cong \theta \Leftrightarrow u_*(t) = -\frac{c(t)}{2} = 2 - \frac{t}{2} > 1$ при $0 \leqslant t < 2$ решения не дает, т.к. $u_* \notin U$. И вообще не является необходимым, т.к.

$$\int\limits_0^4 (2u_*(t) + t - 4)(u(t) - u_*(t))\, dt \geqslant 0\ \forall u(t) \in U.$$

Для того, чтобы это соотношение было выполнено, достаточно, чтобы подынтегральная функция была неотрицательной при каждом $t \in [0,4]$. Поскольку $u_* \in U$, то $-1 \leqslant u_*(t) \leqslant 1$ и очевидно, что при $t \in [0,2]$ выражение $2u_*(t) + t - 4$ неположительно. Стало быть, выражение $u(t) - u_*(t)$ тоже должно быть неположительным для любых $u(t) \in U$, что выполняется лишь в случае $u_*(t) \equiv 1$.

Если же $t \in (2,4]$, то мы можем просто обнулить первый из сомножителей под интегралом, положив $u_*(t) = 2 - \frac{1}{2}t$. Итак, оптимальное управление $u_*(t)$ имеет вид

$$x_*(t) = \begin{cases} x(0) + \int_0^t 1\, ds = t, & t \in [0,2] \\ x(2) + \int_2^t 2 - \frac{s}{2}\, ds = \underbrace{2 + 2t - 4 - \frac{t^2}{4} + 1}_{-\frac{t^2}{4} + 2t - 1}, & t \in [2,4] \end{cases}$$

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,2], \\ 2 - \frac{1}{2}t, & \text{если } t \in (2,4]. \end{cases}$$

$$J_* = J(u_*) = \int\limits_0^2 (1 + t - 4)\cdot 1\, dt + \int\limits_2^4 \left(2 - \frac{t}{2} + t - 4\right)\left(2 - \frac{t}{2}\right) dt = \left(\frac{t^2}{2} - 3t\right)\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{t}{2} - 2\right)^3\Big|_2^4 = -4 - 2/3 = -\frac{14}{3}$$

В заключение отметим, что из теоремы Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов вытекает, что найденное управление является единственным решением рассматриваемой задачи. Слабый вариант Т.В. также применим, ибо $J(u)$ – н/непр. снизу, выпуклый $\to$ слабо н/непр. снизу

$\forall u \in U$ $||u||^2_{L^2(0,4)} = \int\limits_0^4 \underbrace{u^2(t)}_{\leqslant 1} dt \leqslant 4 \to U$-ограничено $\to$ слабо компактно

Кстати $\operatorname{int} U = \varnothing$ $\{\partial U = U\}$:

для $\forall u \in U$ рассмотрим фикс. для $\forall \varepsilon > 0$ $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0,\varepsilon] \\ 0, & t \in (\varepsilon, 4] \end{cases} \to \begin{cases} ||u_\varepsilon||_{L_2(0,4)} = 3\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0 \\ u + u_\varepsilon \notin U, \text{ т.к. } u(t) + u_\varepsilon(t) \overset{\text{п.в.}}{\geqslant} 2\ t \in [0,\varepsilon] \end{cases} \to u \notin \operatorname{int} U$, $\operatorname{int} U = \varnothing$ ч.т.д.

+ Пример 2

В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается задача минимизации

$$J(u) = ||u-b||^2_{\mathbb{H}} - \langle a, u\rangle^2_{\mathbb{H}} \to \inf_{u \in U},$$

U-вып, зам, огр. ⇒ сл. комп.
J(u) непр. дифф. ⇒ непр. ⇒ п/непр. снизу
J(u) - вып. ⇒ сл. п/непр. снизу ⇒ $U_* \neq \emptyset$

шар — вып, зам, огр.

$$U = \left\{u \in \mathbb{H} \mid ||u-a||^2_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{1}{4}\right\}; \ ||a||_{\mathbb{H}} = ||b||_{\mathbb{H}} = 1, \langle a, b\rangle_{\mathbb{H}} = 0.$$

Начнём с того, что проверим выполнение условий теоремы - проекционной формы критерия оптимальности. Множество U представляет из себя шар, поэтому оно является выпуклым и замкнутым. Для исследования функционала $J(u)$ на выпуклость применим критерий выпуклости:

приращ. градиента: $J'(u+h)-J'(u) \cong 2(u+h-b)-2\langle a,u+h\rangle a - 2(u-b)+2\langle a,u\rangle a = 2h-2\langle a,h\rangle a + \bar{o}(\|h\|)$ — линейно по h — $(2E-2D)h$

$$J'(u) \cong 2(u-b) - 2\langle a, u\rangle_{\mathbb{H}} a; \ J''(u) \cong 2E-2D,$$

int $U \neq \emptyset$ непр. ← const

где E — единичный оператор, а оператор D действует по правилу $Dh = \langle a, h\rangle_{\mathbb{H}} a$. Тогда $\langle J''(u)h, h\rangle_{\mathbb{H}} = 2||h||^2_{\mathbb{H}} - 2\langle a, h\rangle^2_{\mathbb{H}}$. Поскольку $\langle a, h\rangle^2_{\mathbb{H}} \leqslant ||a||^2_{\mathbb{H}} \cdot ||h||^2_{\mathbb{H}}$ в силу неравенства Коши-Буняковского, то $\langle J''(u)h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \ \forall h \in \mathbb{H}$, при этом $\langle J''(u)a, a\rangle_{\mathbb{H}} = 0$ ($a \neq \Theta_{\mathbb{H}}$). Значит, функционал $J(u)$ является выпуклым на всём пространстве $\mathbb{H}$, но не является сильно выпуклым на множестве U (и вообще, на любом множестве с непустой внутренностью)

После этого проверим, не может ли какая-то внутренняя точка v множества U являться решением нашей задачи. Если бы это было так, то необходимо выполнялось бы условие $J'(v) \cong \Theta_{\mathbb{H}}$, то есть $v = b + \langle a, v\rangle_{\mathbb{H}} a$. Это соотношение означает, что v является линейной комбинацией элементов a и b, то есть $v = pa + qb$, p, $q \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$v = b + \langle a, v\rangle_{\mathbb{H}} a \Rightarrow pa + qb = b + pa \Rightarrow q = 1, p - \text{любое}.$$

$\|pa+b-a\|^2_{\mathbb{H}} = \underbrace{(p-1)^2\|a\|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2(p-1)\langle a,b\rangle}_{=0} + \underbrace{\|b\|^2}_{1} \not\leqslant \frac{1}{4}$

Но ни одна из точек вида $v = pa + b$, очевидно, не лежит в множестве U. Значит, решение u_* нашей задачи лежит на его границе. Положим

Дополним $\{a, b, c_1, c_2, \ldots\}$ до ортог. базиса и разложим $u_* = \alpha a + \beta b + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots$ ($= \gamma c$ обозн.)

$$u_* = \alpha a + \beta b + \gamma c, \ ||c||_{\mathbb{H}} = 1, \langle c, a\rangle_{\mathbb{H}} = \langle c, b\rangle_{\mathbb{H}} = 0.$$

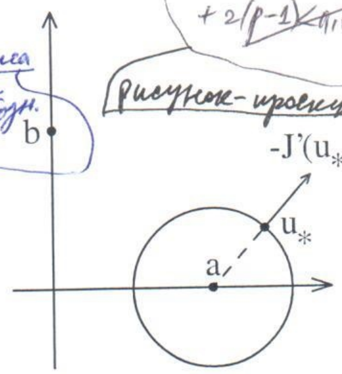

Рисунок-проекция задачи на пл-ть векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Из геометрических соображений ясно, что соотношение $u_* = Pr_U(u_* - \alpha J'(u_*))$ означает сонаправленность антиградиента $-J'(u_*)$ и вектора $u_* - a$. Алгебраически это можно выразить следующим образом:

$$-J'(u_*) \cong 2(\cancel{\alpha}a + (\beta-1)b + \gamma c) + 2\alpha a, \ u_* - a = (\alpha-1)a + \beta b + \gamma c;$$

$$-J'(u_*) \uparrow\uparrow u_* - a \Leftrightarrow -J'(u_*) = \lambda(u_* - a), \ \lambda > 0.$$

Приравнивая коэффициенты при a, b и c, имеем $0 = \lambda(\alpha-1)$, $-2\beta + 2 = \lambda\beta$, $-2\gamma = \lambda\gamma$, откуда имеем $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2}{2+\lambda}$. Стало быть, $u_* = a + \beta b$, $0 < \beta = \frac{2}{2+\lambda} < 1$. Наконец, вспоминая, что, в силу принадлежности u_* границе множества U, $||u_* - a||^2_{\mathbb{H}} = \frac{1}{4}$, имеем $\beta^2 = \frac{1}{4}$, $\beta > 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$. Итак, $U_* = \{a + \frac{1}{2}b\}$, $J_* = \frac{1}{4}$.

$$J_* = \|\underbrace{a + \tfrac{1}{2}b - b}_{a - \frac{1}{2}b}\|^2 - \underbrace{\langle a, a + \tfrac{1}{2}b\rangle}_{1}{}^2 = 1 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

см. оборот

При этом, кстати, выполнен обычный критерий опт-ти: $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle\big|_{u_* = a + \frac{b}{2}} =$
$= \langle 2(a + \frac{1}{2}b - b) - 2\langle a, a + \frac{1}{2}b\rangle a, u - a - \frac{1}{2}b\rangle =$
$= \langle 2a - b - 2a, u - a - \frac{1}{2}b\rangle = -\langle b, u\rangle + \frac{1}{2} \geqslant 0$

$|\langle u, b\rangle| = |\langle a + u - a, b\rangle| = |\langle u - a, b\rangle| \overset{u \in U}{\underset{К-Б}{\leqslant}} \frac{1}{2} \cdot 1$

В $\mathbb{R}^2$ из геометрических соображений видно: {в $\mathbb{H}$ эта же ф-ла подтверждается по К.О.}

к Примеру 2

$$\langle \underbrace{u_* - b - \langle a, u_* \rangle_{\mathbb{R}^2} a}_{= -\lambda b,\ \lambda > 0},\ u - u_* \rangle_{\mathbb{R}^2} \geq 0 \quad \forall u \in S_{\frac{1}{2}}(a)$$

Рассматриваем границу.

$$\boxed{u_* = a + \frac{1}{2} b}$$

—36.1—